ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHAN THỊ THU HUYỀN

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN GIẢI TOÁN SƠ CẤP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

--------------📖--------------

PHAN THỊ THU HUYỀN

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN GIẢI TOÁN SƠ CẤP

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS: Nguyễn Thị Ngọc Oanh

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Trang

Lời nói đầu

Phương trình sai phân là một lĩnh vực được nhiều nhà khoa học quan tâm bởi tính hữu hiệu của nó khi giải số các mô hình đề xuất, ta có thể tham khảo ứng dụng đa dạng của phương trình sai phân trong tài liệu [3] và các tài liệu tham khảo của nó. Bên cạnh những ứng dụng mạnh mẽ của phương trình sai phân khi nghiên cứu các mô hình phức tạp thì phương trình sai phân có nhiều ứng dụng hiệu quả khi giải các bài toán trong chương trình phổ thông như: tính tổng chuỗi, tìm số hạng tổng quát, chứng minh bất đẳng thức,. . . .

Luận văn gồm có trong hai chương.

Chương 1 trình bày lại một số kiến thức liên quan tới phương trình sai phân như định lý tồn tại và duy nhất nghiệm, toán tử Δ và toán tử E, toán tử Δ^{-1},. . . .

Chương 2 nghiên cứu phương trình sai phân tuyến tính, cách tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính, đồng thời giới thiệu một số phương pháp khác tìm nghiệm phương trình sai phân tuyến tính cấp một. Phần cuối của chương trình bày một vài ứng dụng của phương trình sai phân trong việc tính tổng dãy số, tìm số hạng tổng quát của dãy số và một số bài toán liên quan.

Để thực hiện và hoàn thành đề tài Luận văn này, em xin gửi lời cảm ơn chân thành đến Ban Giám hiệu, bộ phận Sau đại học - Phòng đào tạo, Khoa Toán- Tin trường Đại học Khoa học – Đại Học Thái Nguyên cùng quý thầy cô trong trường đã giảng dạy và giúp đỡ em trong suốt quá trình hoc tập và nghiên cứu.

Đồng thời xin chân thành cảm ơn tới gia đình, người thân, bạn bè và các anh chị trong lớp đã tạo điều kiện giúp đỡ em trong quá trình học tập và nghiên cứu đề tài của mình.

Đặc biệt, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Tiến sĩ Nguyễn Thị Ngọc Oanh người hướng dẫn khoa học đã trực tiếp dành thời gian, công sức hướng dẫn em trong quá trình nghiên cứu và thực hiện luận văn.

Em xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 01 tháng 11 năm 2019

Học viên

Phan Thị Thu Huyền

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản về phép tính sai phân

Trong chương này chúng tôi sẽ trình bày các kiến thức cơ bản nhất liên quan tới phép tính sai phân, các định nghĩa và định lý về nghiệm, sự tồn tại và duy nhất nghiệm; toán tử sai phân Δ cùng các tính chất cơ bản, toán tử dịch chuyển E.... Nội dung của chương này được tham khảo chính trong các Chương 1 và Chương 2 tài liệu [2], Chương 1 tài liệu [3].

1.1. Định nghĩa

Một dãy số là một hàm mà miền xác định của nó là tập các số nguyên. Trong phần này, chúng ta sẽ xét các dãy mà miền xác định là các số nguyên không âm. Ta ký hiệu số hạng tổng quát của dãy là y_k và sử dụng ký hiệu $\{y_k\}$ để biểu diễn dãy $y_0, y_1, y_2, \dots$

Cho dãy số $\{y_k\}$ thỏa mãn

$$y_{k+n} = F(k, y_{k+n-1}, y_{k+n-2}, \dots, y_k). \tag{1.1}$$

Khi cho trước giá trị ban đầu thì ta có thể tính toán được các giá trị còn lại. Như vậy, từ phương trình (1.1), rõ ràng nếu n giá trị liên tiếp của y_k xác định một cách cụ thể thì dãy $\{y_k\}$ được xác định một các duy nhất. Các giá trị cụ thể này được gọi là các điều kiện ban đầu.

Định nghĩa sau đây cho ta sự liên hệ giữa dãy và phương trình sai phân.

Định nghĩa 1.1 *Một phương trình sai phân thường là một quan hệ có dạng cho trước bởi phương trình* (1.1).

Định nghĩa 1.2 *Cấp của phương trình sai phân là hiệu giữa chỉ số cao nhất và chỉ số thấp nhất xuất hiện trong phương trình.*

Phương trình cho dưới dạng (1.1) là một phương trình sai phân cấp n khi và chỉ khi thành phần y_k xuất hiện trong hàm F trong vế phải. Chú ý rằng dịch chuyển trong các chỉ số không đổi cấp của phương trình sai phân. Chẳng hạn như với số nguyên r

$$y_{k+n+r} = F(k+r, y_{k+n+r-1}, y_{k+n+r-2}, \ldots, y_{k+r}) \tag{1.2}$$

là một phương trình sai phân cấp n và tương đương với phương trình (1.1).

Định nghĩa 1.3 *Một phương trình sai phân được gọi là tuyến tính nếu nó được cho dưới dạng*

$$y_{k+n} + a_1(k)y_{k+n-1} + a_2(k)y_{k+n-2} + \cdots + a_{n-1}(k)y_{k+1} + a_n(k)y_k = R_k, \tag{1.3}$$

trong đó $a_i(k),\ i = 1, 2, \ldots, n$ *và* R_k *là các hàm của* k *cho trước.*

Định nghĩa 1.4 *Một phương trình sai phân được gọi là phi tuyến nếu nó không tuyến tính.*

Định nghĩa 1.5 *Một nghiệm của phương trình sai phân là một hàm* $\phi(k)$ *thỏa mãn phương trình.*

Các ví dụ sau đây sẽ làm rõ các định nghĩa vừa được đưa ra ở phần trên.

Ví dụ 1.1 Xét một số phương trình sau

$$y_{k+1} - 3y_k + y_{k-1} = e^{-k} \qquad \text{(bậc hai, tuyến tính)},$$
$$y_{k+1} = y_k^2 \qquad \text{(bậc một, phi tuyến)},$$
$$y_{k+4} - y_k = k2^k \qquad \text{(bậc bốn, tuyến tính)},$$
$$y_{k+1} = y_k - (1/100)y_k^2 \qquad \text{(bậc một, phi tuyến)},$$
$$y_{k+3} = \cos y_k \qquad \text{(bậc ba, phi tuyến)},$$
$$y_{k+2} + (3k-1)y_{k+1} - \frac{k}{k+1}y_k = 0 \qquad \text{(bậc hai, tuyến tính)}.$$

Ví dụ 1.2 Hàm

$$\phi(k) = 2^k$$

là nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính bậc một

$$y_{k+1} - 2y_k = 0,$$

vì khi thay $\phi(k)$ vào phương trình, ta thu được

$$2^{k+1} - 2.2^k = 0$$

Ví dụ 1.3 Phương trình phi tuyến bậc nhất

$$y_{k+1}^2 - y_k^2 = 1 \tag{1.4}$$

có nghiệm

$$\phi(k) = \sqrt{k+c}$$

trong đó c là hằng số. Thật vậy, thế $\phi(k)$ vào phương trình (1.4) thu được

$$(\sqrt{k+1+c})^2 - (\sqrt{k+c})^2 = (k+1+c) - (k+c) = 1.$$

Ví dụ 1.4 Phương trình tuyến tính bậc hai

$$y_{k+1} - y_{k-1} = 0 \tag{1.5}$$

có hai nghiệm,

$$\phi_1(k) = (-1)^k, \quad \phi_2(k) = 1.$$

Gọi c_1 và c_2 là hai hằng số tùy ý. Bây giờ, ta thấy hàm

$$\varphi(k) = c_1\varphi_1(k) + +c_2\varphi_2(k) = c_1(-1)^k + c_2$$

cũng là một nghiệm. Thật vậy, thế $\varphi(k)$ phương trình (1.5) ta được

$$c_1(-1)^{k+1} + c_2 - c_1(-1)^{k-1} - c_2 = 0.$$

1.2. Nguồn gốc phương trình sai phân

Giả sử rằng y_k là phần tử tổng quát của dãy $\{y_k\}$ được xác định theo một hàm cụ thể của k và n cùng các hằng số $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nào đó. Bây giờ, ta sẽ chỉ ra rằng y_k thỏa mãn phương trình sai phân cấp n.

Theo giả thiết, ta có

$$y_k = f(k, c_1, c_2, \ldots, c_n) \tag{1.6}$$

và

$$\begin{aligned} &y_{k+1} = f(k+1, c_1, c_2, \ldots, c_n), \\ &\ldots \\ &y_{k+n} = f(k+n, c_1, c_2, \ldots, c_n). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Đây là một dãy gồm $n+1$ phương trình với n hằng số $c_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Khử các hằng số c_i ta nhận được quan hệ có dạng

$$G(k, y_k, y_{k+1}, \ldots, \ldots, y_{k+n-1}) = 0 \tag{1.8}$$

Đây là một phương trình sai phân cấp n. Như vậy, nếu phần tử tổng quát y_k của dãy $\{y_k\}$ có thể biểu diễn như là hàm của k và n hằng số nào đó thì y_k sẽ thỏa mãn một phương trình sai phân cấp n.

Ví dụ 1.5 Các đa thức Chebyshev được xác định bởi biểu thức sau

$$C_k(x) = \frac{1}{2^{k-1}}\cos(k\cos^{-1} x),\ k = 0, 1, 2, \ldots,;\ |x| < 1. \tag{1.9}$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra các hàm này quan hệ truy hồi với nhau theo phương trình sau đây

$$C_{k+1}(x) - xC_k(x) + \frac{1}{4}C_{k-1}(x) = 0 \tag{1.10}$$